ΔΙΔΑΚΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ.

Γιάννης Π. Πλατάρος Καπετάν Κρόμπα 37, 242 00 ΜΕΣΣΗΝΗ, ηλ.ταχ. plataros@gmail.com

Περίληψη

Στην εργασία αυτή, παρουσιάζονται διδακτικά μοντέλα για την διδασκαλία βασικών θεωρημάτων του Απειροστικού Λογισμού. Το αναφορικό νόημα βασικών θεωρημάτων, όπως τα Θεωρήματα Bolzano, Rolle, Μέσης Τιμής διαφορικού λογισμού, Σταθερού σημείου, μπορεί να αναδειχθεί ιδιαίτερα όταν τα θεωρήματα συνδέονται μεταξύ τους, μέσω είτε γεωμετρικών μοντέλων, είτε άλλων προσιτών καθημερινών καταστάσεων. Με αυτό τον τρόπο, γίνονται καλύτερα κατανοητά από τους μαθητές, οι οποίοι διευρύνουν το πλαίσιο αναφοράς τους.

Εισαγωγή

Η αναζήτηση και ανάπτυξη απλών, προσιτών, φυσικών ή μαθηματικών μοντέλων για την κατανόηση μιας έννοιας είναι μια αρχαία και διαρκής ερευνητική διαδικασία ανήσυχων δασκάλων, προκειμένου να αναπτύξουν πολλαπλές αναπαραστάσεις μιας έννοιας, ώστε να συμβάλουν στην βαθύτερη κατανόησή της από μέρους των μαθητών. Επίσης η χρήση πρότερων εννοιών στο κτίσιμο μιας άλλης, είναι πασίγνωστη διδακτική πρακτική. Ο Gagne (1970) [8] ανέπτυξε μια νέα –τότε - θεωρία μάθησης, η οποία βασίζεται στην ιδέα ότι οι απλούστερες μαθηματικές δραστηριότητες αποτελούν τα δομικά υλικά για τις πιο πολύπλοκες, οι οποίες -με τη σειρά τους- μπορούν να αναλυθούν στα πιο απλά τους συστατικά. Σε αυτά τα πλαίσια, το «πετυχημένο παράδειγμα» ή μοντέλο που λαμβάνει υπ΄ όψιν του τις υπάρχουσες εμπειρίες των μαθητών και τις αξιοποιεί για το κτίσιμο της νέας έννοιας είναι εκ των ων ουκ άνευ του δάσκαλου των Μαθηματικών. Ειδικά για τους μαθησιακούς στόχους στο νέο Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών Α΄ Λυκείου (2011) καταγράφεται ότι:

«...χρειάζεται να αφιερωθεί περισσότερος χρόνος στην κατανόηση και εμπέδωση των εννοιών μέσα από την ανάπτυξη πολλαπλών αναπαραστάσεων τους, καθώς και τη χρήση τους στην επίλυση προβλημάτων…» και ένας από τους στόχους της διδασκαλίας είναι «…η ανάπτυξη της ικανότητας μετάφρασης από τη φυσική στη μαθηματική γλώσσα και αντίστροφα…»[1]

Στον Απειροστικό Λογισμό, σπουδαία και βασικά του θεωρήματα, διδακτικά πλέον προσεγγίζονται και μέσω της γεωμετρικής τους σημασίας (οπτική αναπαράσταση) Μάλιστα, η ικανότητα μετάφρασης από το ένα σύστημα αναπαράστασης μιας έννοιας στο άλλο, διαδραματίζει σημαντικό ρόλο όχι μόνο για τη μάθηση μαθηματικών εννοιών, αλλά και για την επίλυση μαθηματικού προβλήματος. [7] .Μάλιστα, αυτή η προσέγγιση μπορεί να εμπλουτιστεί και με εμπειρικά φυσικά μοντέλα που παρουσιάζομε παρακάτω.

Οι συναρτήσεις κίνησης των σωμάτων

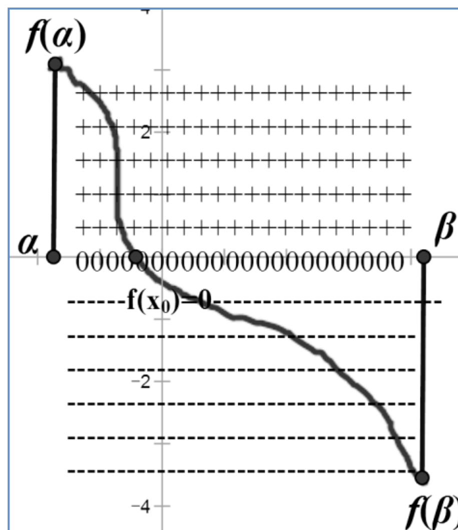
Οι συναρτήσεις κίνησης οιουδήποτε σώματος μάζα, ακόμα και «υλικού σημείου» (που θεωρείται ότι έχει μάζα, αλλά όχι διαστάσεις) υ(t), s(t), a(t) είναι προφανώς συνεχείς συναρτήσεις αφού ορίζονται πάντα σε κάποιο διάστημα $[t_1,t_2]$ και δεν είναι δυνατόν σε μηδενικό χρόνο ένα σώμα να βρεθεί αλλού (λόγω αδράνειας) όπως και σε μηδενικό χρόνο να μεταβάλλει ταχύτητα ή επιτάχυνση. Για τους ίδιους λόγους δεν είναι δυνατόν μια συνάρτηση s(t) να έχει γωνιώδη σημεία, αφού στο γωνιώδες σημείο θα έχουμε δύο διαφορετικές εφαπτόμενες (=δύο διαφορετικές ταχύτητες) σε μηδενικό χρόνο, δηλαδή πεπερασμένη (διανυσματικά) διαφορά ταχύτητας σε μηδενικό χρόνο, πράγμα που συνεπάγεται άπειρη επιτάχυνση, δηλ. τελικά μηδενική μάζα, όπερ άτοπο. Συνεπώς, όλες οι κινήσεις σωμάτων ή σωματιδίων στην Φύση, περιγράφονται με παραγωγίσιμες (και άρα συνεχείς) συναρτήσεις.

Μοντέλα του Θ. Bolzano

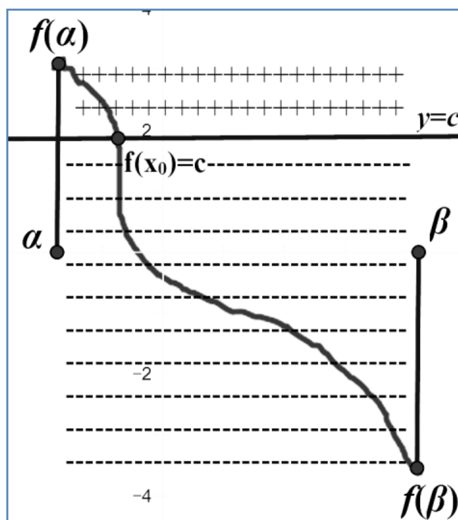
Α) «Για να πάω από το ένα ημιεπίπεδο που ορίζει μια ευθεία στο άλλο με μια μονοκονδυλιά πρέπει υποχρεωτικά να τμήσω την ευθεία που τα ορίζει σε ένα τουλάχιστον σημείο.» (Οπτική επικύρωση με ένα απλό σχήμα)

Β) Είμαι στην μία όχθη ποταμού. Δεν μπορώ να πετάξω, δεν μπορώ να κάνω σήραγγα. Κινούμαι σε επίπεδο. Για να περάσω στην άλλη όχθη, πρέπει υποχρεωτικά να διασχίσω το ποτάμι.» Αυτό βεβαίως είναι ένα φυσικό-ατελές μοντέλο, που ενέχει κινδύνους, οι οποίοι όμως, μπορούν να αξιοποιηθούν διδακτικά. Λόγου χάριν ο μαθητής μπορεί να πει «θα παρακάμψω τις πηγές» ή «θα πηγαίνω όλο πίσω κάθετα στην διεύθυνση του ποταμού, θα κάνω τον κύκλο της Γης και θα…φθάσω στην άλλη όχθη!» Ο καθηγητής δύναται να αναφερθεί σε ποτάμι με ιδιότητες ευθείας, σε επιφάνεια σφαίρας όπως είναι η Γη, αν υπάρχει. Μπορεί να γίνει σχολιασμός του μέγιστου κύκλου σφαίρας, όπου είναι αντικείμενο μιας διάστασης χωρίς αρχή και τέλος, άρα προσομοιάζει με την ευθεία στην επίπεδη εκδοχή της, που ουσιαστικά αναδεικνύει την ισχύ της απλής ιδέας του Θ. Bolzano και στην Σφαιρική (Διπλή Ελλειπτική) Γεωμετρία.

Γ) Αναγνώριση ότι η ευθεία με εξίσωση y=0 τέμνεται από την γραφική παράσταση της $f(x)$. Μερική γενίκευση με θεώρηση της ευθείας y=c, όπου η γνωστή



Σχήμα 1: *Η Αναλυτική- Γεωμετρική θεώρηση του Θ.Bolzano, βλέπει το γ.τ. των σημείων με θετικές τεταγμένες κα ι τον γ.τ. των σημείων με αρνητικές, όπου η συνεχής μετάβαση από το ένα ημιεπίπεδο στο άλλο, θα μας δώσει μία τουλάχιστον τεταγμένη ίση με 0.*

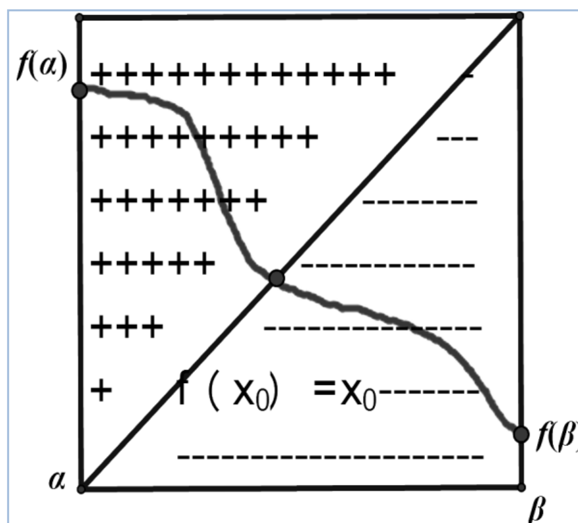


Σχήμα 2*: Μία γενίκευση του Θ. Bolzano, θεωρεί αντί την ευθεία y=0, την ευθεία y=c, όπου η γνωστή συνθήκη $f(\alpha)f(\beta)<0$ γίνεται $(f(\alpha)-c)(f(\beta)-c)<0$, δεν είναι γόνιμη από μαθηματική άποψη, καθώς τα προβλήματα ύπαρξης λύσεως σε εξίσωση, αντιμετωπίζονται με το κανονικό*

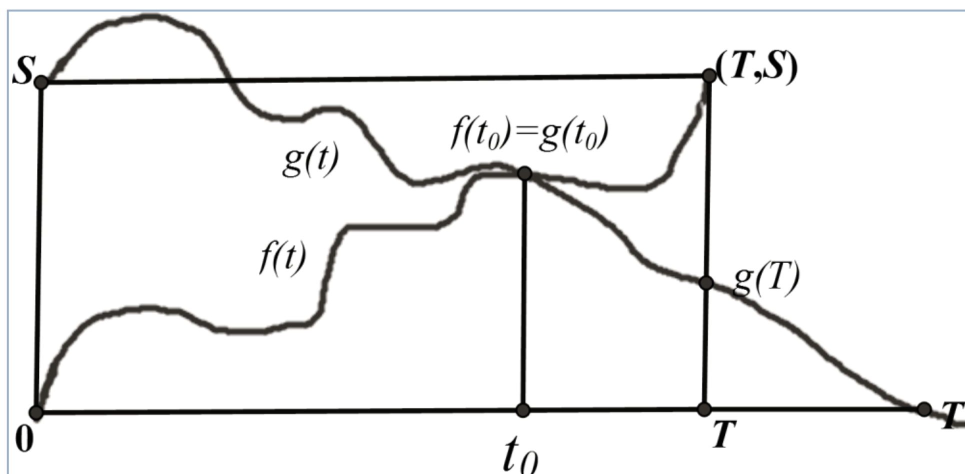
συνθήκη $f(α)f(β)<0$ μετατρέπεται σε $(f(α)-c)(f(β)-c)<0$. Η γεωμετρική θεώρηση ότι πάνω από την y=c, έχω θετικές τιμές για την παράσταση $f(α)-c$ και αρνητικές για την $f(β)-c$. (*βλέπε σχήμα 2*) Τελικά η διαπίστωση, ότι η γενίκευση αυτή, δεν είναι γόνιμη ως προς την αντιμετώπιση προβλημάτων, αφού αν θέλουμε να λύσουμε μια εξίσωση της μορφής $f(χ)=c$, δεν προσφεύγουμε σε μια γενίκευση του Θ. Bolzano, αλλά θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=f(x)-c$ και εφαρμόζουμε την γνωστή μορφή του θεωρήματος. Περεταίρω γενίκευση μπορεί να δώσει το Θ. Σταθερού Σημείου.

Θ. Σταθερού Σημείου (Θ. Brower)

« Αν $f : [α,β] \rightarrow [α,β]$ συνεχής, τότε υπάρχει $χ_0 \in [α,β]$: $f(χ_0)=χ_0$.» Αυτή η απλή μορφή του Θεωρήματος παρουσιάζεται στο Λύκειο ως άσκηση, η οποία λύνεται αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$ και εφαρμόσω το Θ. Bolzano. (Βλέπε σχήμα 3) Εκ πρώτης όψεως φαίνεται κι αυτή μια «μη γόνιμη» επέκταση του Θ. Bolzano, αλλά η σημασία του είναι μεγίστη, καθώς εκτός από το ότι μπορεί να αποδειχθεί αυτοτελώς, έχει την δική του σημειολογία στην ανεύρεση σταθερών σημείων στις Γεωμετρικές και ιδίως τις Τοπολογικές απεικονίσεις, στην ανάπτυξη προσεγγιστικών επαναληπτικών μεθόδων, όπου ιδίως στην μέθοδο Νεύτωνα, αναζητούμε μοναδική λύση σε συστολή συνάρτησης [5] Επίσης, στην θεωρία Παιγνίων του Nash, στις διαφορικές εξισώσεις, αλλά και στην Οικονομία (Θεώρημα Αδυνάτου του Arrow [4]) Αν μάλιστα γενικευθεί σε πλήρεις Μετρικούς Χώρους, δίνει το περίφημο Θ. Σταθερού Σημείου του Banach.



Σχήμα 3: *Εδώ, πάνω από την διαγώνιο του τετραγώνου έχουμε τεταγμένη-τετμημένη, θετική τιμή, μηδέν στην διαγώνιο και αρνητική κάτω.*



Σχήμα 4*: Ο Μοναχός ξεκινά από το σημείο 0 και κάνοντας την διαδρομή με διαφορετικές ταχύτητες, στάσεις, ακόμα και οπισθοπορεία, μετά από χρόνο T, φθάνει στον προορισμό του, σε απόσταση S. Η κίνησή του, περιγράφεται με την συνάρτηση f(t). Ένα φανταστικό ομοίωμα του εαυτού του, που ξενικά την ίδια ώρα από τον προορισμό προς την αφετηρία (στο σχήμα ξεκινά για λίγο με οπισθοπορεία) Τελικά είναι διαισθητικά βέβαιο, υπό εύλογες προϋποθέσεις, να το συναντήσει σε ένα τουλάχιστον σημείο της διαδρομής.*

Η εποπτική παράθεση και κατανόηση των σχημάτων 1,2και 3, επάγει την γενίκευση που φαίνεται στο σχήμα 4 . Μάλιστα γι αυτή την γενίκευση, υπάρχει μια ενδιαφέρουσα ιστορία –πρόβλημα με έναν βουδιστή μοναχό. Σύμφωνα με αυτήν, ο μοναχός ξεκινά από την θέση Α και κατευθύνεται προς ένα ναό στη κορυφή ενός βουνού. Δεν κρατάει σταθερό βηματισμό και κάνει διάφορες στάσεις, ανάλογα με την επιθυμία του να διαλογιστεί. Κάποια στιγμή σταματάει να πιει νερό σε μια πηγή και παρατηρεί ότι η σκιά ενός δέντρου πέφτει ακριβώς στο ρυάκι του νερού.
Τη νύχτα φτάνει στο ναό διανύοντας διάστημα S (σημείο Β) και το ξημέρωμα ξεκινάει το ταξίδι του γυρισμού. Περνώντας μπροστά από την πηγή, διαπιστώνει ότι το δέντρο ρίχνει τη σκιά του ακριβώς στο ρυάκι του νερού και συμπεραίνει ότι συνέβη μια εκπληκτική σύμπτωση: Τόσο όταν πήγαινε όσο και όταν γυρνούσε, πέρασε από την πηγή ακριβώς την ίδια ώρα.» [2],[3] Μάλιστα για να το αποδείξει νοητικά, έκανε την εξής υπερβατική σκέψη: Αν ένα αντίγραφο του εαυτού μου, ξεκινούσε την ίδια ώρα από Μοναστήρι και ακολουθούσε την αντίστροφη πορεία, κάποια στιγμή θα με συναντούσε. Εκείνη την στιγμή θα ήταν η ίδια ώρα και το μέρος θα ήταν το ζητούμενο. Η καθαρά μαθηματική προσέγγιση, λέει ότι έχουμε δύο τυχαίες συναρτήσεις κίνησης:

Την f(t), ορισμένη στο [0,T] με f(0)=0 και f(T)=S και την g(t),ορισμένη στο [0,T΄], με g(0)=S>0, g(T΄)=0. Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση h(t)=g(t)-f(t) στο [0,T] θεωρώντας ότι T΄>T, θα είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών και εξετάζοντας την δυνατότητα εφαρμογής του Θ. Bolzano, έχουμε h(0)=g(0)-f(0)=S. h(T)=g(T)-f(T)=g(T)-S, οπότε αν (όπως φαίνεται στο σχήμα 4) g(T)-S<0, τότε πληρούται η συνθήκη του Θ.Bolzano h(0)h(T)<0, άρα υπάρχει t_0 : $h(t_0)=0$, δηλ. $g(t_0)-f(t_0)=0$ ή $g(t_0)=f(t_0)$, ισότητα που δηλώνει την ύπαρξη μίας τουλάχιστον στιγμής (t_0) όπου συναντάται στο ίδιο μέρος της διαδρομής του δρόμου. Αν T΄ <T, ή T=T΄ προφανώς ισχύει το ίδιο συμπέρασμα.

Θεώρημα Rolle

Α) « Θέλω να πάω από ένα σημείο Α σε ένα ισοϋψές σημείο Β. Αν πάω από το Α στο Β οριζόντια, έχει καλώς. Αν ξεκινήσω με ανοδική πορεία, σε κάποια φάση της διαδρομής θα χρειαστεί να κάνω καθοδική. Πριν κάνω την καθοδική, έστω και για μια στιγμή, θα κινηθώ οριζόντια. Αν ξεκινήσω καθοδικά, θα χρειαστεί μετά να πάω ανοδικά. Πριν πάω ανοδικά, έστω και για μια στιγμή, θα κινηθώ οριζόντια. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν, όπως και να πάω από το Α στο ισοϋψές Β, θα κινηθώ έστω και για μια στιγμή, οριζόντια. Σε τροχιές που έχουν γωνιώδη σημεία δεν συμβαίνει πάντοτε αυτό. (Σχεδιαστικό παράδειγμα στον πίνακα)

Β) «Πετάω μια πέτρα κατακόρυφα. Ανεβαίνοντας κάνει επιβραδυνόμενη κίνηση με σταθερή επιβράδυνση g και κατεβαίνοντας επιταχυνόμενη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση g. Πριν κατέβει η πέτρα για μια στιγμή t_0 θα σταματήσει. Τότε θα έχει ταχύτητα 0 . Η Ταχύτητα όμως είναι η πρώτη παράγωγος της εξίσωσης κίνησης. Δηλ. $S΄(t_0)=0$. Την στιγμή t_0, έχω ακρότατο της συνάρτησης και συγκεκριμένα μέγιστο. Μάλιστα, λόγω και αυτού του προβλήματος κατακόρυφης βολής, που εξέταζε ιστορικά στα πρώτα του βήματα ο Απειροστικός Λογισμός, το σημείο ονομάστηκε «στάσιμο» μια ορολογία που χρησιμοποιείται ακόμα για τα ακρότατα συνάρτησης.»

Γ) (Γενίκευση στο προηγούμενο) Κινητό εκκινεί από σημείο Α και κάνοντας οποιαδήποτε διαδρομή στον χώρο, με οποιαδήποτε συνάρτηση ταχύτητας, ξαναγυρνά στο ίδιο σημείο Α. Αν S(t) είναι το μήκος του της απομάκρυνσης από το Α (μήκος διανύσματος θέσης) είναι βέβαιο, ότι υπάρχει μία τουλάχιστον στιγμή, όπου σταματά να απομακρύνεται όπου θα φθάσει στο μέγιστο σημείο απομάκρυνσης από το Α, πριν επιστρέψει σε αυτό. Εκεί έχει ταχύτητα 0, δηλ. S΄(t)=0.

Πρώτο Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού.

Α) Ξεκινάω από ένα σημείο Α και θέλω να πάω σε ένα σημείο Β. Αν πάω από το Α κατ΄ ευθείαν και συνεχώς στην κατεύθυνση AB (κλίση του AB), θα φθάσω στο

Β. Αν πριν φθάσω στο Β κατευθυνθώ σε μεγαλύτερη κλίση από την AB, δεν θα φθάσω ποτέ στο Β αν δεν κινηθώ και σε κλίση μικρότερη από AB . Πριν κινηθώ σε κατεύθυνση μικρότερη, έστω και για μια στιγμή θα κινηθώ σε κλίση ίση με AB. Το ίδιο αν κινηθώ σε μικρότερη, όπου θα αναγκαστώ να κινηθώ κάποια στιγμή σε μεγαλύτερη και πριν κινηθώ σε μεγαλύτερη θα κινηθώ έστω και για μια στιγμή σε ίση. Ο καθηγητής μπορεί να φτιάχνει και σχετικό σχήμα με βασικό πειστικό επιχείρημα, ότι η κίνηση συνεχώς σε μεγαλύτερη ή μικρότερη κλίση δεν οδηγεί ποτέ στο Β.

Β) Ένα αυτοκίνητο, διανύει την απόσταση ΑΒ=300Km, με σταθερή ταχύτητα 100Km/h και φυσικά χρειάζεται 3h για να την διανύσει. Αν κάποια στιγμή κινηθεί με ταχύτητα μεγαλύτερη από 100Km/h έχοντας την απαίτηση να φθάσει πάλι σε 3h, θα χρειαστεί να πάει κάποιο διάστημα με μικρότερη ταχύτητα από 100Km/h. Πριν κινηθεί με μικρότερη ταχύτητα, έστω και για μια στιγμή το ταχύμετρο θα περάσει και από την ένδειξη 100Km/h. Ομοίως και αν κινηθεί και με ταχύτητα μικρότερη από 100Km/h, όπου θα χρειαστεί να πάει με μεγαλύτερη αν θέλει να φθάσει στις 3h και έστω και για μια στιγμή θα πάει με 100Km/h .

Πρώτο Θεώρημα Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού

Κινητό κινείται σε μια διαδρομή με μεταβαλλόμενη ταχύτητα που δίνεται από την συνάρτηση υ(t), διανύοντας συνολικά διάστημα S σε χρόνο Τ. Αν κινηθεί με (σταθερή) ταχύτητα S/T για τον ίδιο χρόνο T, θα διανύσει διάστημα (S/T)T=S. Δηλαδή θα διανύσει το ίδιο διάστημα στον ίδιο χρόνο. Φυσικά δίνεται και η γνωστή γεωμετρική ερμηνεία με τα εμβαδά στο διάγραμμα υ(t). Επίσης, μπορεί και πρέπει να προηγηθεί η πιο απλή περίπτωση της κίνησης με σταθερή επιτάχυνση, όπου από το γνωστό διάγραμμα α=ct, μεταβαίνουμε με ολοκλήρωση στην συνάρτηση υ(t)=αt και με μια επί πλέον ολοκλήρωση στην $S(t)=\frac{1}{2}\alpha t^2$

Συμπεράσματα

Η διασύνδεση των ήδη κατεχόμενων εννοιών της κίνησης με τις έννοιες της Ανάλυσης μέσα από την μαθηματική θεώρηση των μοντέλων, προάγει την αποτελεσματικότερη κατανόησή των εννοιών, στα γνωστά πλαίσια παροχής πολλαπλής αναπαράστασης των εννοιών κατά την διδασκαλία τους. Άρα πρέπει να παρουσιάζονται και τέτοια μοντέλα κατά την αντίστοιχη διδασκαλία των παραπάνω βασικών θεωρημάτων του Απειροστικού, στο Λύκειο. Τα γεωμετρικά μοντέλα των θεωρημάτων

αποτελούν αφετηρίες για γενικεύσεις, πράγμα εξαιρετικά δύσκολο από την συμβολική του διατύπωση. Για παράδειγμα στο Θ. Rolle έχουμε ισοϋψή σημεία, τι γίνεται αν είναι ανισοϋψή; (Θ . Μέσης Τιμής) Στο Θ.Bolzano, η ευθεία την οποία τέμνει η f(x), έχει εξίσωση y=0. Τι γίνεται αν έχω εξίσωση y=c, y=x (Θ.Brower) y=αx, γενικώς y=f(x); Το γνωστό θέμα της μη επάρκειας του χρόνου για την αποτελεσματική ολοκλήρωση της διδακτέας ύλης, πρέπει να σταθμιστεί με το κριτήριο της αποτελεσματικής-χρηστικής κατανόησης των εννοιών, καθώς και με την έμφαση που δίνουν πλέον τα νέα ΑΠΣ σε αυτό.

Ο Απειροστικός Λογισμός δημιουργήθηκε από την ανάγκη αποτελεσματικής μελέτης προβλημάτων ρυθμού μεταβολής που δεν μπορούσε να αντιμετωπίσει η κλασική Άλγεβρα ή η Γεωμετρία. Τα πρώτα προβλήματα ήταν τα προβλήματα κίνησης της Φυσικής. Αν μάλιστα λάβουμε υπ΄ όψιν μας και δεχθούμε ότι ο γνωστός βιογενετικός νόμος μάθησης («η οντογένεση είναι μια γρήγορη επανάληψη της φυλογένεσης – εξέλιξης») [6] σχετίζεται (όπως κάποιοι εικάζουν) με την ιστορική εξέλιξη των επιστημών, άρα και με την βέλτιστη σειρά από πλευράς φυσικής μαθησιακής ετοιμότητας, σύμφωνα με την οποία θα πρέπει να παρουσιάζονται οι έννοιες, τότε η παρουσίαση και έμφαση στην διδασκαλία του Απειροστικού των μοντέλων κίνησης, είναι πιθανότατα προς την σωστή κατεύθυνση της αποτελεσματική διδασκαλίας.

Βιβλιογραφικές και Διαδικτυακές Αναφορές

[1] **Πρόγραμμα Μαθηματικών Α΄ Τάξης Λυκείου** (ΦΕΚ 1168/2011 - Αριθμ. 59614/Γ2) Διαθέσιμο σε http://edu.klimaka.gr/nomothesia/fek/1377-fek-1168-2011-programma-spoudes-algebra-gewmetria-a-lykeiou.html (τελευταία πρόσβαση 31/8/2011)

[2] http://neadiastasi.blogspot.com/2009/10/blog-post.html (τελευταία πρόσβαση 31/8/2011)

[3] http://dorigo.wordpress.com/2006/02/15/solution-to-the-ubiquitous-monk-problem/ (τελευταία πρόσβαση 31/8/2011)

[4] : http://users.uoi.gr/kammas/economic_policy_2.pdf (τελευταία πρόσβαση 31/8/2011)

[5] **Κυριακόπουλος Γεώργιος** Διπλωματική Εργασία «Το Θεώρημα του Σταθερού Σημείου και Διδακτικές Εφαρμογές» Διαθέσιμο σε: http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_kyriakopoulos.pdf (τελευταία πρόσβαση 10/9/2011)

[6] **Αλαχιώτης Σ.Ν.** Μια νέα θεωρία μάθησης-Βιοπαιδαγωγισμός Διαθέσιμο σε: http://www.alfavita.gr/artra/art13_12_08_1439.php (τελευταία πρόσβαση 31/8/2011)

[7] **Janvier, C.** (1987). Translation Processes in Mathematics Education. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

[8] **Gagné, R. M**. (1970). *The conditions of learning*. 2nd edition. New York: Holt, Rinehart and Winston.